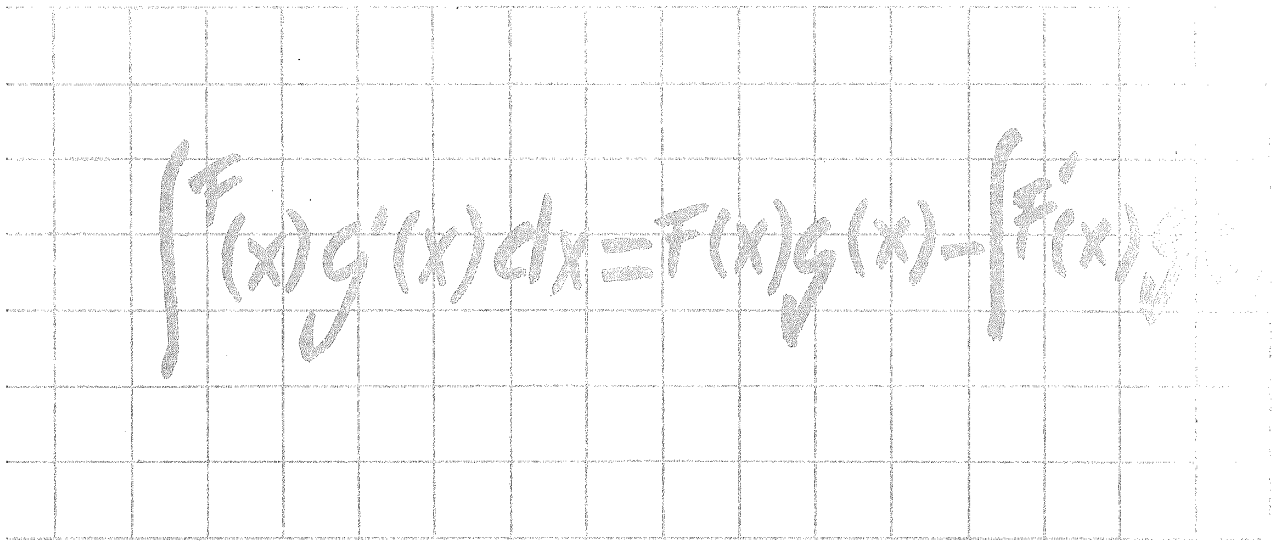
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN /1

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1. Sumatoria y notación
2. La integral definida y la integral indefinida
3. Integrales elementales
4. ***Métodos de integración 1***
5. Métodos de integración 2
6. Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 4
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN /1

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RIC KC 100

La presentación y disposición en conjunto de
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 1
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1435-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

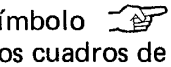
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 Integrales de Potencias de funciones trigonométricas

4.2 Integrales de Productos de potencias de funciones trigonométricas

4.3 Integrales de Productos de funciones trigonométricas de ángulos múltiples

4.4 Integración por partes

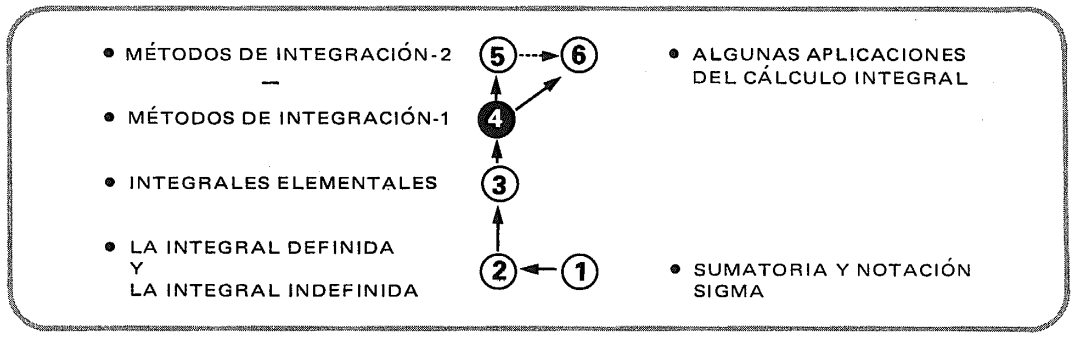
4.5 Fórmulas de reducción

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 4. Métodos de integración 1

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes por el método de "integración por partes" o mediante el empleo de "fórmulas de reducción"

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Manejo de expresiones exponenciales o logarítmicas	2	9, 10
• Manejo de expresiones trigonométricas	5	1, 3, 4, 5, 6, 8
• Derivación de funciones	7	4, 5
• Concepto de integral	8	1, 2
• Integrales elementales	8	3

4.1

Integrales de potencias de funciones trigonométricas

1

Sabemos que:

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$-\cos x + C$

2

Hemos ya estudiado una manera de obtener el resultado de la integral:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

mediante la transformación trigonométrica del integrando.

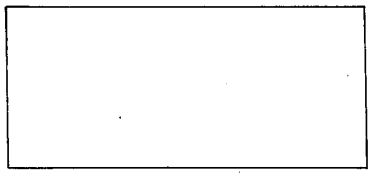
3

Hagamos memoria.

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = ?$$

A partir de la identidad

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$



$\text{sen}^2 x =$ ⌊_____⌋

$\cos 2x = (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$

$\cos 2x - 1 = -2\,\text{sen}^2 x$

$2\,\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

- $\dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

4

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = ?$$

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)dx}{2} = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$\dfrac{1}{2}\int dx =$ ⌊_____⌋

$\dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$ ⌊_____⌋

$=$ ⌊_____⌋

- $\dfrac{x}{2} + C_1$
- $\dfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + C_2$
- $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\text{sen}\,2x}{4} + C$

  siendo $C = C_1 + C_2$

5

Estudiar con atención.

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)dx}{2} = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,2x}{4} + C$$

6

Para calcular:

$$\int \text{sen}^4 x\, dx$$

Escribimos:

$$\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

o

$$\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}$$

7

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$\frac{1}{4}\int dx = \boxed{\qquad}$$

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \boxed{\qquad}$$

Haciendo caso omiso de las constantes de integración.

$$\frac{x}{4}$$

$$\frac{\text{sen } 2x}{4}$$

8

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

Calculemos, ahora, utilizando la misma idea:

$$\int \cos^2 2x\ dx$$

$$\int \cos^2 2x\, dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \int\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}$$

9

$$\int \text{sen}^4 x\,dx = \frac{x}{4} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}\right] + C$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + C$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{\text{sen } 4x}{32} + C$$

10

De manera análoga podemos calcular por ejemplo:

$$\int \text{sen}^6 x\,dx = \int \boxed{\qquad\qquad} dx$$

Poniendo el integrando como una suma de términos en cos 2x.

$$= \int \boxed{\qquad\qquad} dx$$

$$= \int \boxed{\qquad\qquad} dx$$

$$= \int \boxed{\qquad\qquad} dx$$

$(\text{sen}^2 x)^3$

$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3$

$\frac{1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x}{8}$

$\frac{1}{8} - \frac{3\cos 2x}{8} + \frac{3\cos^2 2x}{8} - \frac{\cos^3 2x}{8}$

11

$$\int \text{sen}^6 x\,dx = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Escribamos como una suma de integrales.

$\frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx$

$+ \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx$

$- \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$

12

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

Demos el resultado de las primeras dos integrales:

$$\frac{1}{8}\int dx = \boxed{\qquad}$$

$$\frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx = \boxed{\qquad}$$

haciendo caso omiso de las constantes de integración.

$\frac{x}{8}$

$\frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x$

13

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

Trabajemos la tercera integral:

$$\frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx = \boxed{\qquad}$$

puesto que

$\frac{3x}{16} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64}$

$$\frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int \frac{(1+\cos 4x)dx}{2}$$
$$= \frac{3}{16}\int dx + \frac{3}{16}\int \cos 4x\,dx$$

14

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{x}{8} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3x}{16} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

$$= \frac{5x}{16} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

Nuestro problema se reduce al cálculo de la integral

$$\int \cos^3 2x\,dx$$

15

Atención.

Podemos escribir:

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x\,dx$$
$$= \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx$$
$$= \int \cos 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx$$

16

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx$$

Demos los resultados de estas dos integrales.

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3 \cdot 2}$$

- $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}$

17

Entonces:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5x}{16} - \frac{3\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$

Expresión simplificada:

$$\frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$

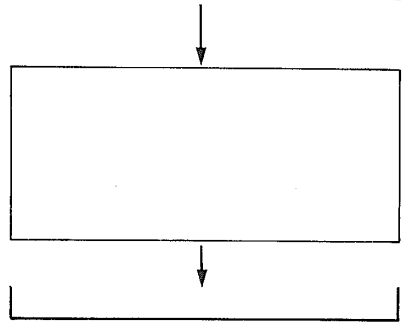
18

Obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$

19

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \square$$



$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$

$\int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx$

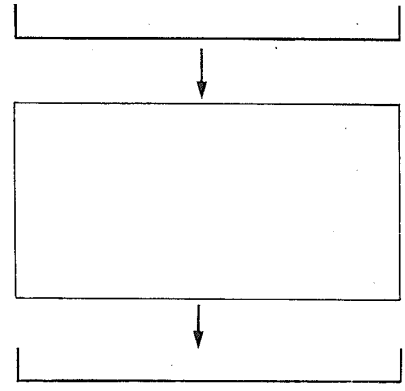
$\int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

$$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

20

Intentemos calcular:

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \square$$



$\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$

$\int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx$

$\int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx$

$\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x\,dx$

$\int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$

$$-\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

21

Resumiendo y ordenando:

- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
- $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$
- $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$
- $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$

Podemos utilizar la misma idea para seguir calculando las potencias enteras positivas de sen x.

22

De manera similar podemos calcular

$\int \cos^n x\,dx$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- $\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$
- $\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$

etcétera.

23

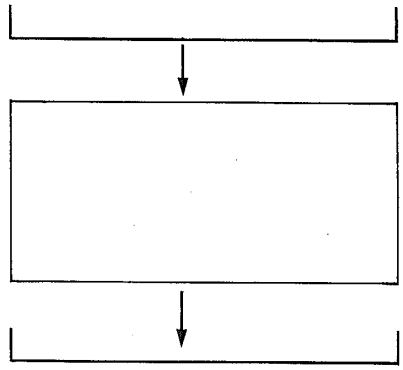
Recordemos que:

$\int \tan x\,dx =$ [ ]

$\ln|\sec x| + C$

24

Intentemos calcular:

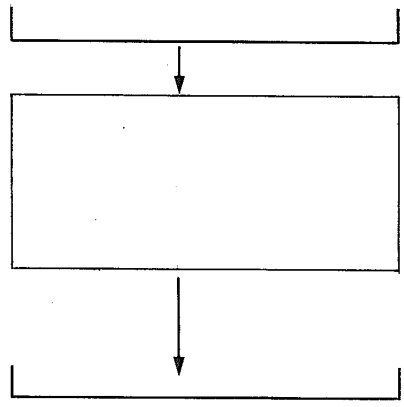
$\int \tan^2 x\,dx =$ 

$\int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$\int \sec^2 x\,dx - \int dx$

$\tan x - x + C$

25

$\int \tan^3 x\,dx =$ 

$\int \tan^2 x \tan x\,dx$

$\int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx$

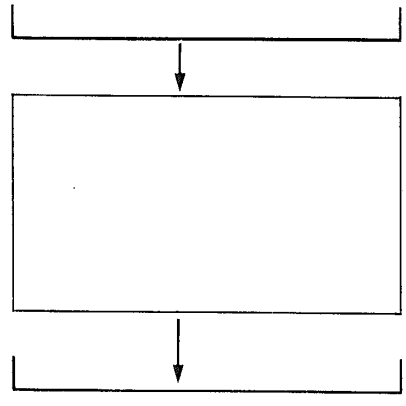
$\int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx$

$\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$

o bien

$\frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

26

$\int \tan^4 x\,dx =$ 

$\int \tan^2 x \tan^2 x\,dx$

$\int (\sec^2 x - 1)\tan^2 x\,dx$

$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx$

$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)dx$

$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx$

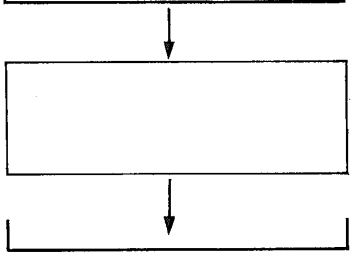
$\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$

27

El mismo procedimiento puede utilizarse para el cálculo de $\int \cot^n x\,dx$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Por ejemplo:

$\int \cot^3 x\,dx =$ [ ]



$\int \cot^2 x \cdot \cot x\,dx$

$\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \cot x\,dx$

$\int \cot x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \cot x\,dx$

$-\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\operatorname{sen} x| + C$

8.4.1.1

Práctica adicional de cálculo de integrales de las formas:

$\int \operatorname{sen}^n u\,du$

$\int \cos^n u\,du$

$\int \tan^n u\,du$

$\int \cot^n u\,du$

con $n \in \mathbb{Z}^+$ si se considera necesario.

28

Ahora:

$\int \sec x\,dx =$ [ ]

$\ln|\sec x + \tan x| + C$

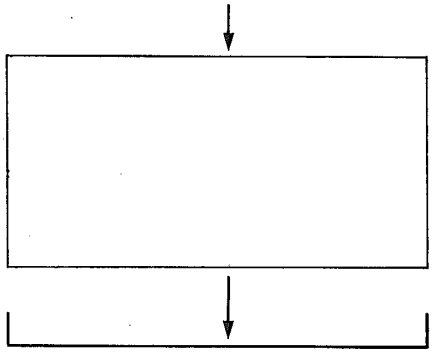
29

$\int \sec^2 x\,dx =$ ____

$\tan x + C$

30

$\int \sec^4 x\,dx =$ ____



$\int \sec^2 x \sec^2 x\,dx$

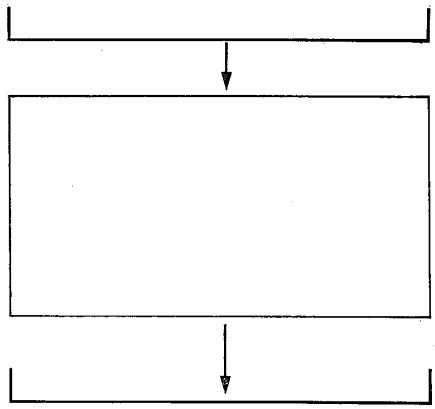
$\int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$\int \sec^2 x\,dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$

$\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

31

$\int \sec^6 x\,dx =$ ____



$\int \sec^4 x \sec^2 x\,dx$

$\int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x\,dx$

$\int (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x\,dx$

$\int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x)\sec^2 x\,dx$

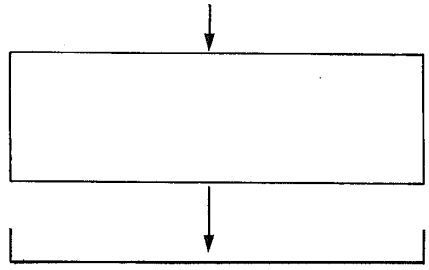
$\int \sec^2 x\,dx + 2\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx + \int \tan^4 x \sec^2 x\,dx$

$\tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$

32

De manera similar
podemos proceder
para el cálculo de $\int \operatorname{cosec}^n x\,dx$ con $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n$ es par
por ejemplo:

$\int \operatorname{cosec}^4 x\,dx =$ ⌊ ⌋



$\int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$\int (1 + \cot^2 x) \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

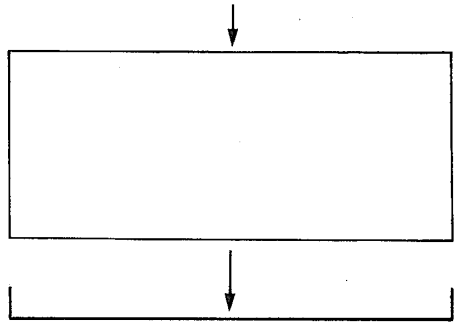
$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$-\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C$

33

Ahora, intentemos calcular:

$\int \sec^3 x\,dx =$ ⌊ ⌋



$\int \sec^2 x \sec x\,dx$

$\int (1 + \tan^2 x) \sec x\,dx$

$\int \sec x\,dx + \int \tan^2 x \sec x\,dx$

$\ln|\sec x + \tan x| + \int \tan^2 x \sec x\,dx$

No podemos calcular esta integral
por los métodos estudiados.

8.4.1.2

Práctica adicional de
cálculo de integrales
de las formas:

$\int \sec^n u\,du$

$\int \operatorname{cosec}^n u\,du$

con $n \in \mathbb{Z}^+$ y n es par,
si se considera necesario.

8.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales de las formas:

$$\left.\begin{array}{l}\int \operatorname{sen}^n u\,du \\ \int \cos^n u\,du \\ \int \tan^n u\,du \\ \int \cot^n u\,du\end{array}\right\} n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\int \sec^n u\,du \\ \int \operatorname{cosec}^n u\,du\end{array}\right\} n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \text{ es par}$$

4.2

Integrales de
productos de potencias
de funciones trigonométricas

34

Calcular

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \boxed{}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

35

Intentemos:

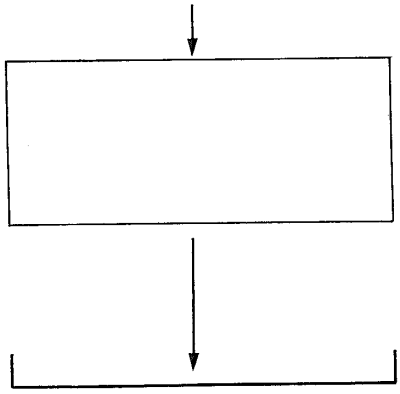
$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \boxed{}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{}$$



- $\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx$

$\int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx$

En el submódulo anterior hemos encontrado que:

$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$ y

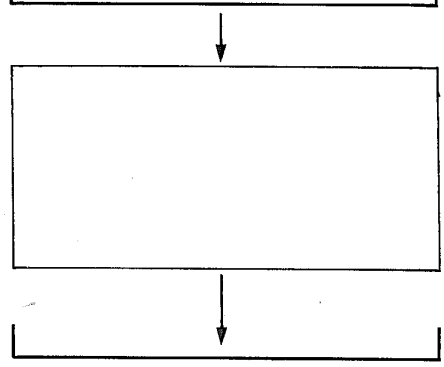
$\int \cos^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}$

- $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$ o bien

$\mathbf{\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C}$

36

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx = \boxed{}$$



$$\int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}\, \overbrace{\operatorname{sen} x \, dx}$$

poner en términos de cos x

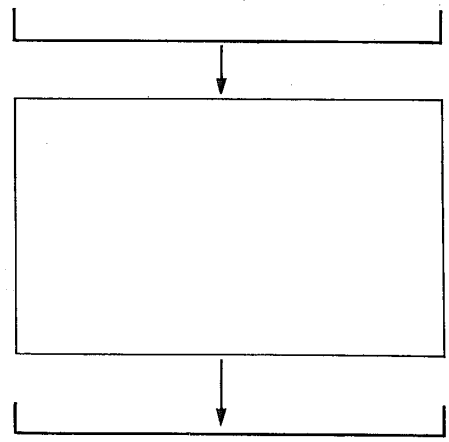
$$\int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

37

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx = \boxed{}$$



$$\int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}\, \overbrace{\cos x \, dx}$$

poner en términos de sen x

$$\int \operatorname{sen}^2 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) \cos x \, dx$$

$$\int (\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x) \cos x \, dx$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$$

8.4.2.1

Práctica adicional de cálculo de integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du$$

con $n, m \in \mathbb{Z}^+$
si se considera necesario.

38

Calculemos:

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\tan^2 x}{2} + C$$

39

$$\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\tan^4 x}{4} + C$$

40

$$\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\tan^6 x}{6} + C$$

41

$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx =$ _____

$\int \tan^6 x \sec^2 x \, dx =$ _____

$\frac{\tan^5 x}{5} + C$

$\frac{\tan^7 x}{7} + C$

42

$\int \tan x \sec^4 x \, dx =$ _____

$\int \tan x (\sec^2 x) \sec^2 x \, dx$

poner en términos de $\tan x$

$\int \tan x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$

$\int \tan x \sec^2 x \, dx + \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx$

$\frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^4 x}{4} + C$

43

$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx =$ _____

$\int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$

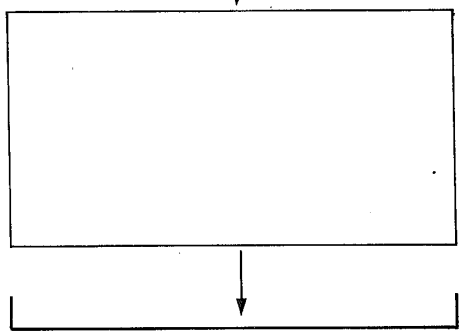
$\int (\tan^2 x + \tan^4 x) \sec^2 x \, dx$

$\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

$\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$

44.

$$\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$



$$\int \tan^3 x (\sec^2 x) \sec^2 x \, dx$$

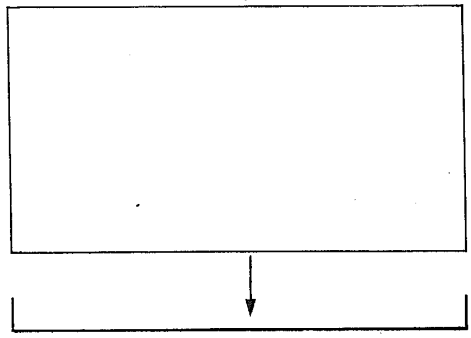
$$\int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx$$

$$\frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

45

$$\int \tan x \sec^6 x \, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$



$$\int \tan x (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx$$

$$\int \tan x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x \, dx$$

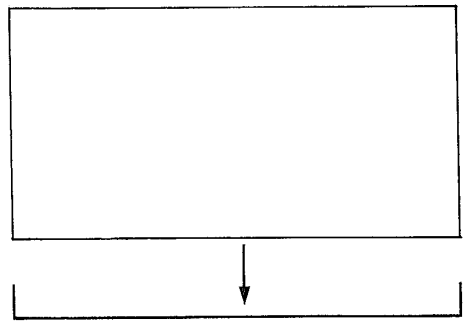
$$\int \tan x (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) \sec^2 x \, dx$$

$$\int (\tan x + 2\tan^3 x + \tan^5 x) \sec^2 x \, dx$$

$$\frac{\tan^2 x}{2} + \frac{\tan^4 x}{2} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

46

$$\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$



$$\int \underbrace{\tan^4 x \sec^2 x}_{\text{poner en términos de sec x}} \cdot \tan x \sec x \, dx$$

$$\int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$

$$\int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$

$$\int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) \tan x \sec x \, dx$$

$$\frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

47

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \square$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x \cdot \overbrace{\tan x \sec x \, dx}$$

$$\int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$

$$\int (\sec^4 x - \sec^2 x)\tan x \sec x \, dx$$

$$\frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

48

$$\int \tan x \sec^3 x \, dx = \square$$

Atención.

$$\int \sec^2 x \cdot \overbrace{\tan x \sec x \, dx}$$

$$\frac{\sec^3 x}{3} + C$$

49

$$\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx = \square$$

Escribiendo la integral en cualquiera de las formas:

$$\int \tan^2 x \sec x \cdot \overbrace{\sec^2 x \, dx} \quad \text{o}$$

$$\int \tan x \sec^2 x \cdot \overbrace{\tan x \sec x \, dx}$$

nos es imposible proseguir por los métodos estudiados hasta el momento.

8.4.2.2

Práctica adicional de cálculo de integrales de las formas:

$$\left.\begin{array}{l}\int \tan^n u \sec^n u \, du \\ \int \cot^n u \operatorname{cosec}^n u \, du\end{array}\right\} \text{con } n \in \mathbb{Z}^+$$

para los casos en que tal integración es posible por los métodos estudiados hasta el momento, si se considera necesario.

8.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales de la forma:

  $\int \text{sen}^m u \cos^n u \, du$ con $n, m \in \mathbb{Z}^+$

- *calcular* integrales de las formas:

  $\int \tan^n u \sec^n u \, du$ y $\int \cot^n u \operatorname{cosec}^n u \, du$ con $n, m \in \mathbb{Z}^+$

  en los casos en que tal integración es posible con los métodos estudiados hasta el momento.

4.3

Integrales de productos de funciones trigonométricas de ángulos múltiples

50

Recordemos estas 4 identidades trigonométricas:

- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta =$ ____
- $\cos\alpha\cos\beta =$ ____
- $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$ ____

$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$

$\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

51

- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

Estas identidades nos permitirán transformar integrandos de las formas:

- sen mx cos nx
- cos mx cos nx
- cos mx sen nx
- sen mx sen nx

en expresiones integrables por los métodos estudiados.

52

Veamos:

$\operatorname{sen} mx \cos nx =$ ____

$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

53

$\cos mx \operatorname{sen} nx =$ ____

$\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x - \operatorname{sen}(m-n)x]$

54

$\cos mx \cos nx =$ ____

$\frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

55

$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx =$ ____

$-\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$

56

Algunos ejemplos numéricos:

$\operatorname{sen} 3x \cos 2x =$ ____

$\frac{1}{2}[\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x]$

57

$\cos 6x \operatorname{sen} 4x =$ ____

$\frac{1}{2}[\operatorname{sen} 10x - \operatorname{sen} 2x]$

58

$\cos 3x \cos 7x =$ ____

Expresión simplificada: ____

$\frac{1}{2}[\cos 10x + \cos(-4x)]$

pero recordemos que:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

entonces:

$\frac{1}{2}[\cos 10x + \cos 4x]$

59

$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x =$ ____

Expresión simplificada: ____

$-\frac{1}{2}[\cos 3x - \operatorname{sen}(-x)]$

pero:

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

por lo tanto:

$-\frac{1}{2}[\cos 3x + \operatorname{sen} x]$

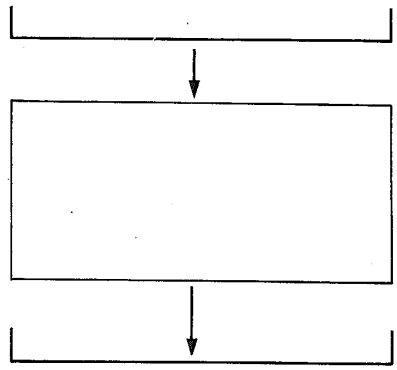
8.4.3.1

Práctica adicional de transformación de expresiones trigonométricas haciendo uso de las identidades:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} mx \cos nx &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \\
\cos mx \operatorname{sen} nx &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x - \operatorname{sen}(m-n)x] \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \\
\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx &= -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]
\end{aligned}\right\} \text{ con } m, n \in \mathbb{R} \wedge m \neq n$$

si se considera necesario.

60

$\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx =$ 

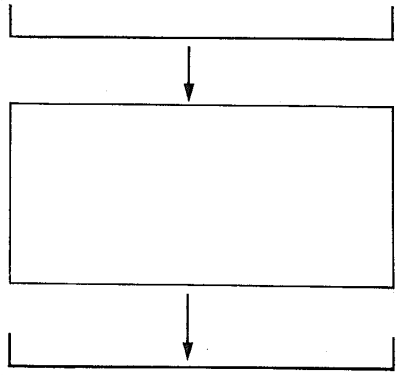
$\frac{1}{2}\int [\text{sen } 6x + \text{sen } (-2x)]dx$

$\frac{1}{2}\int (\text{sen } 6x - \text{sen } 2x)\, dx$

$\frac{1}{2}\int \text{sen } 6x\, dx - \frac{1}{2}\int \text{sen } 2x\, dx$

$-\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

61

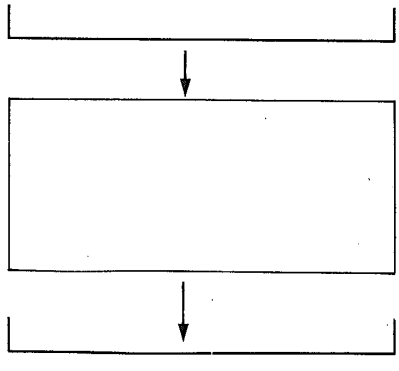
$\int \cos 3x \text{ sen } 2x\, dx =$ 

$\frac{1}{2}\int (\text{sen } 5x - \text{sen } x)\, dx$

$\frac{1}{2}\int \text{sen } 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \text{sen } x\, dx$

$-\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C$

62

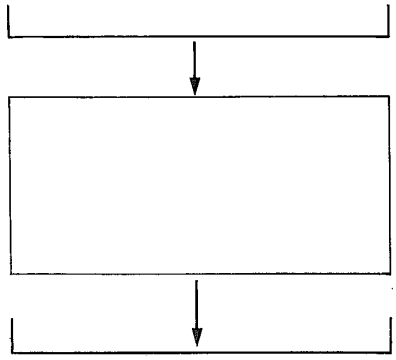
$\int \text{sen } 3x \text{ sen } 2x\, dx =$ 

$-\frac{1}{2}\int [\cos 5x - \cos x]dx$

$-\frac{1}{2}\int \cos 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx$

$-\frac{\text{sen } 5x}{10} + \frac{\text{sen } x}{2} + C$

63

$\int \cos 3x \cos 5x \, dx =$ 

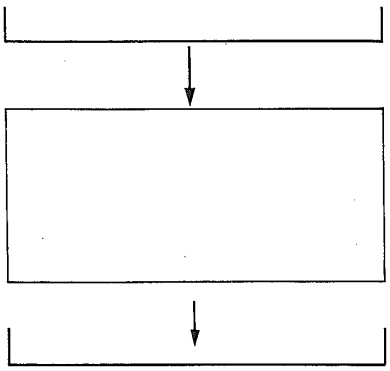
$\frac{1}{2} \int [\cos 8x + \cos(-2x)] dx$

$\frac{1}{2} \int [\cos 8x \, dx + \cos 2x] dx$

$\frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$

$\mathbf{\frac{\text{sen } 8x}{16} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + C}$

64

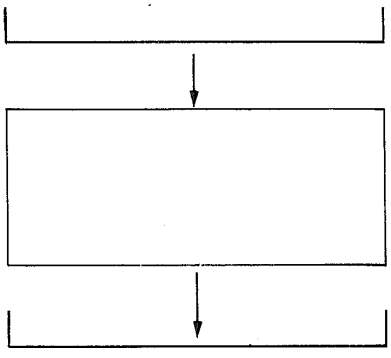
$\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx =$ 

$\frac{1}{2} \int (\text{sen } 5x + \text{sen } x) \, dx$

$\frac{1}{2} \int \text{sen } 5x \, dx + \frac{1}{2} \int \text{sen } x \, dx$

$\mathbf{-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C}$

65

$\int \cos \frac{x}{2} \text{ sen } \frac{x}{3} \, dx =$ 

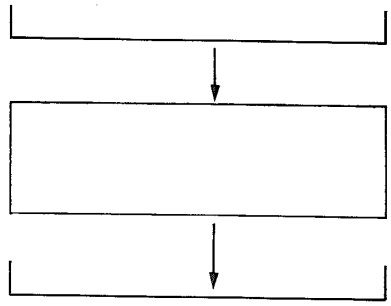
$\frac{1}{2} \int \left[\text{sen } \frac{5x}{6} - \text{sen } \frac{x}{6} \right] dx$

$\frac{1}{2} \int \text{sen } \frac{5x}{6} \, dx - \frac{1}{2} \int \text{sen } \frac{x}{6} \, dx$

$\mathbf{-\frac{3 \cos \frac{5x}{6}}{5} + 3 \cos \frac{x}{6} + C}$

66

Generalizando, para $m, n \in \mathbb{R} \wedge m \neq n$:

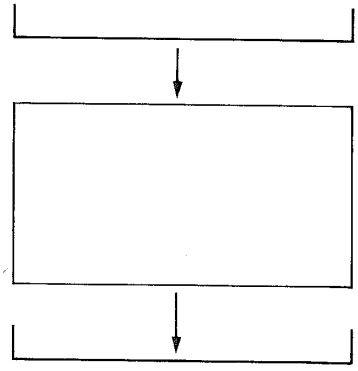
$\int \text{sen } mx \cos nx =$ 

$\frac{1}{2}\int [\text{sen } (m+n)x + \text{sen } (m-n)x]\,dx$

$\frac{1}{2}\int \text{sen } (m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \text{sen } (m-n)x\,dx$

$-\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C$

67

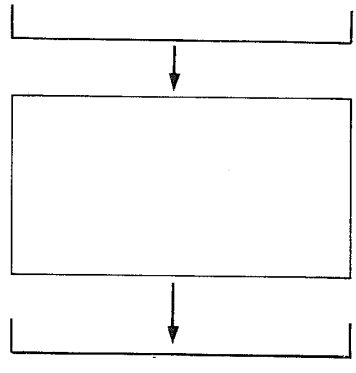
$\int \cos mx \text{ sen } nx\,dx =$ 

$\frac{1}{2}\int [\text{sen } (m+n)x - \text{sen } (m-n)x]dx$

$\frac{1}{2}\int \text{sen } (m+n)x\,dx - \frac{1}{2}\int \text{sen } (m-n)x\,dx$

$-\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C$

68

$\int \cos mx \cos nx\,dx =$ 

$\frac{1}{2}\int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]dx$

$\frac{1}{2}\int \cos (m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos (m-n)x\,dx$

$\frac{\text{sen } (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen } (m-n)x}{2(m-n)} + C$

69

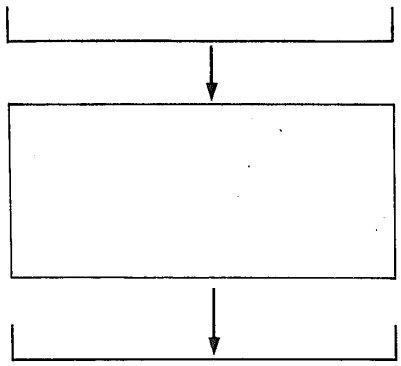
$$\int \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx = \boxed{}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{}$$



$$-\frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx$$

$$-\frac{\text{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

70

Resumen

- $\int \text{sen } mx \cos nx \, dx = -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$
- $\int \cos mx \text{ sen } nx \, dx = -\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$
- $\int \cos mx \cos nx \, dx = \dfrac{\text{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\text{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C$
- $\int \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx = -\dfrac{\text{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \dfrac{\text{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C$

para $m, n \in \mathcal{R} \wedge m \neq n$

8.4.3.2

Práctica adicional de cálculo de integrales de las formas:

$$\left.\begin{array}{l} \int \text{sen } mx \cos nx \, dx \\ \int \cos mx \text{ sen } nx \, dx \\ \int \cos mx \cos nx \, dx \\ \int \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx \end{array}\right\} \text{para } m, n \in \mathcal{R} \wedge m \neq n$$

mediante la transformación trigonométrica del integrando, si se considera necesario.

8.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales de las formas:

  $\int \text{sen } mx \cos nx \, dx$

  $\int \cos mx \text{ sen } nx \, dx$

  $\int \cos mx \cos nx \, dx$

  $\int \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx$

  para $m, n \in \mathcal{R} \wedge m \neq n$
  mediante la transformación trigonométrica del integrando.

4.4

Integración por partes

71

Hemos visto que
no es posible calcular
algunas integrales trigonométricas
aparentemente sencillas,
como éstas:

- $\int \sec^3 x \, dx$
- $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

por los procedimientos hasta aquí estudiados.

72

Vamos, ahora, a ver
un método llamado

integración por partes

que nos permitirá
obtener el resultado
de buen número de integrales.

73

Recordemos esta regla del cálculo diferencial:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \boxed{\qquad\qquad}$$

en que **u** y **v** son funciones de x.

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

74

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

O bien:

$$d(u \cdot v) = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$u\,dv + v\,du$$

75

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

Integremos los miembros de esta ecuación:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\int d(u \cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du$$

o

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

76

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

De aquí obtenemos:

$$\int u\,dv = \boxed{\qquad\qquad}$$

$uv - \int v\,du$

77

Fórmula para la integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

78

Veamos como funciona esto:

consideremos la integral $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Como primer paso
necesitamos considerar
el integrando como el

producto de dos factores:
u y dv.

79

Determinaremos
qué es **u** y
qué es **dv**
por "ensayo y error".

$\int$ **x sen x dx**

↓

$\int$ **u dv**

80

Podemos escribir las
siguientes opciones:

1. $\begin{cases} x \operatorname{sen} x = u \\ dx = dv \end{cases}$

2. $\begin{cases} \square = u \\ \square = dv \end{cases}$

3. $\begin{cases} \square = u \\ \square = dv \end{cases}$

$\int$ **x sen x dx**

↓

$\int$ **u dv**

Por ejemplo:

sen x
x dx

x
sen x dx

81

Exploraremos cada una de las opciones:

1. $\begin{cases} x \operatorname{sen} x = u \\ dx = dv \end{cases}$

2. $\begin{cases} \operatorname{sen} x = u \\ x\,dx = dv \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = u \\ \operatorname{sen} x\,dx = dv \end{cases}$

$\int$ **x sen x dx**

↓

$\int$ **u dv**

82

Fórmula general: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

1. $x \operatorname{sen} x = u$ ◄ **1**
   $dx = dv$ ◄ **2**
   $\square = du$ ◄ **3**
   $\square = v$ ◄ **4**

$$\int \underbrace{x \operatorname{sen} x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$$

Llamaremos a las ecuaciones **1, 2, 3 y 4:** ecuaciones de cambio de variables.

- $x \cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dx = (x \cos x + \operatorname{sen} x)\,dx$
- $\int dx = x$ prescindiendo de la constante de integración

83

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{x \operatorname{sen} x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \square$$

poniendo el segundo miembro de la fórmula en términos de x, de acuerdo con las ecuaciones de cambio de variables.

$x \operatorname{sen} x = u$ ◄ **1**
$dx = dv$ ◄ **2**
$(x \cos x + \operatorname{sen} x)\,dx = du$ ◄ **3**
$x = v$ ◄ **4**

$x^2 \operatorname{sen} x - \int x\,(x \cos x + \operatorname{sen} x)\,dx$

84

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int x\,(x \cos x + \operatorname{sen} x)\,dx$$

Podemos observar que la integral del segundo miembro resulta más complicada que la integral original, es decir que, la selección de la opción 1 no fue muy afortunada, si de lo que se trata es de obtener integrales más fáciles de resolver que la integral original.

85

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Opción 2

$\text{sen } x = u$ ← **1**

$x\,dx = dv$ ← **2**

$\square = du$ ← **3**

$\square = v$ ← **4**

$$\int \underbrace{\text{sen } x}_{u} \cdot \underbrace{x\,dx}_{dv}$$

$\cos x\,dx$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

86

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \text{ sen } x\,dx = \square$$

$\text{sen } x = u$ ← **1**

$x\,dx = dv$ ← **2**

$\cos x\,dx = du$ ← **3**

$\frac{x^2}{2} = v$ ← **4**

$$\frac{x^2 \text{sen } x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

87

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \text{ sen } x\,dx = \frac{x^2 \text{ sen } x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

¡Tampoco esta selección parece haber sido muy afortunada!

88

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Opción 3

$x = u$ ← **1**

$\text{sen } x\,dx = dv$ ← **2**

$\square = du$ ← **3**

$\square = v$ ← **4**

$$\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\text{sen}\,x\,dx}_{dv}$$

dx

$\int \text{sen } x\,dx = -\cos x$

89

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \text{ sen } x\,dx = \square$$

$x = u$ ← **1**

$\text{sen } x\,dx = dv$ ← **2**

$dx = du$ ← **3**

$-\cos x = v$ ← **4**

$-x\cos x + \int \cos x\,dx$

90

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \mathbf{x \text{ sen } x\,dx} = \mathbf{-x\cos x + \int \cos x\,dx}$$

Podemos dar rápidamente el resultado de la integral del segundo miembro.
La selección de la opción 3 es adecuada.

91

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

Como $\int \cos x\,dx =$ [ ]

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx =$$ [ ]

sen x

$-\mathbf{x\cos x + \operatorname{sen} x + C}$

92

Estudiemos con atención:

Fórmula general: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = \underbrace{-x\cos x}_{u\cdot v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = -\mathbf{x\cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

- $x = u$ ← **1**
- $\operatorname{sen} x\,dx = dv$ ← **2**
- $dx = du$ ← **3**
- $-\cos x = v$ ← **4**

} ecuaciones de cambio de variables

93

Intentemos resolver por partes:

$$\int x\cos x\,dx$$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = \mathbf{x \operatorname{sen} x + \cos x + C}$$

Haciendo:

- $x = u$ ◀ **1**
- $\cos x\,dx = dv$ ◀ **2**
- $dx = du$ ◀ **3**
- $\operatorname{sen} x = v$ ◀ **4**

94

Calcular por el método de integración por partes:

$$\int \mathbf{x \ln x\,dx}$$

Respuesta en el cuadro siguiente.

Fórmula general: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

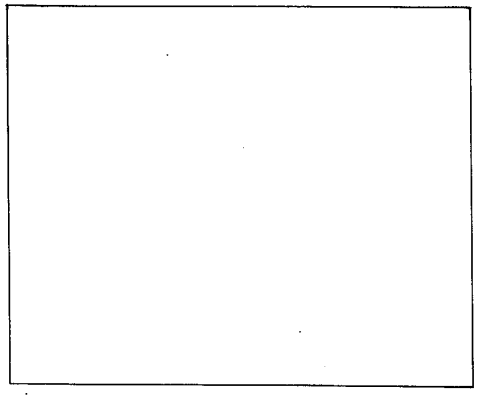
$$\int x \ln x\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{\mathbf{x^2 \ln x}}{2} - \frac{x^2}{4} + \mathbf{C}$$

Hacemos:

- $\ln x = u$ ◀ **1**
- $x\,dx = dv$ ◀ **2**
- $\frac{dx}{x} = du$ ◀ **3**
- $\frac{x^2}{2} = v$ ◀ **4**

95

$\int xe^x dx = ?$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

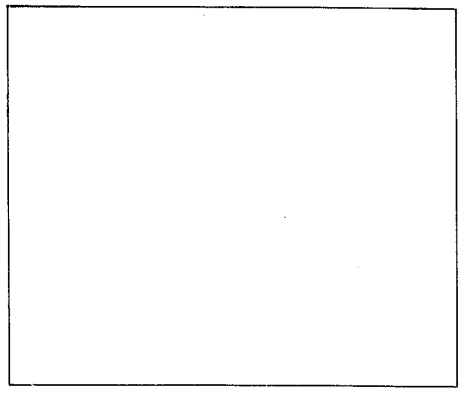
Fórmula general: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \underbrace{xe^x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C = \mathbf{e^x(x-1) + C}$$

- $x = u$ ◀ **1**
- $e^x dx = dv$ ◀ **2**
- $dx = du$ ◀ **3**
- $e^x = v$ ◀ **4**

96

$\int \ln x\,dx = ?$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

- $\ln x = u$ ◀ 1
- $dx = dv$ ◀ 2
- $\frac{dx}{x} = du$ ◀ 3
- $x = v$ ◀ 4

97

$\int x^2 \ln x\,dx = ?$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^2\,dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

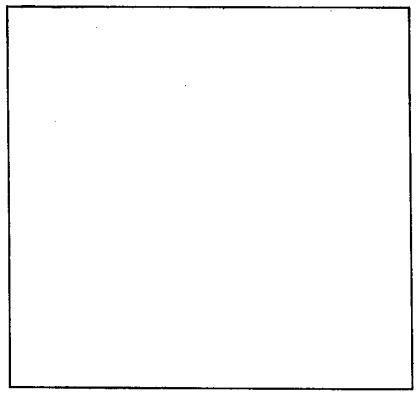
$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$$

- $\ln x = u$ ◀ 1
- $x^2\,dx = dv$ ◀ 2
- $\frac{dx}{x} = du$ ◀ 3
- $\frac{x^3}{3} = v$ ◀ 4

98

$\int x^3 \ln x \, dx = ?$



Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^3 \, dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{v} \underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx$$

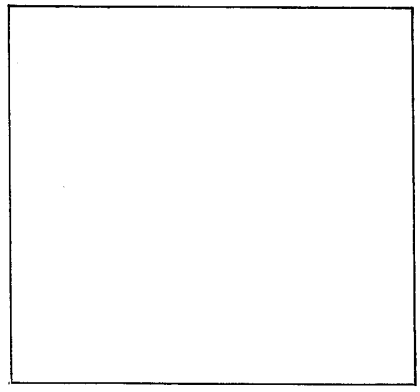
$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C \quad \text{o}$$

$$= \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$$

- $\ln x = u$ ◀ 1
- $x^3 \, dx = dv$ ◀ 2
- $\frac{dx}{x} = du$ ◀ 3
- $\frac{x^4}{4} = v$ ◀ 4

99

$\int x^n \ln x \, dx = ?$



Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^n \ln x\,dx = \left\{ \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^n\,dx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{v} \underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx \right.$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

- $\ln x = u$ ◀ **1**
- $x^n\,dx = dv$ ◀ **2**
- $\frac{dx}{x} = du$ ◀ **3**
- $\frac{x^{n+1}}{n+1} = v$ ◀ **4**

100

En algunos casos
es necesario

aplicar el procedimiento

de integración por partes

más de una vez.

101

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = \boxed{}$$

ecuaciones
de cambio
de variables

$$-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$x^2 = u$ ◀ **1**
$\operatorname{sen} x\,dx = dv$ ◀ **2**
$2x\,dx = du$ ◀ **3**
$-\cos x = v$ ◀ **4**

102

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Obtenemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

pero es necesario aplicar nuevamente el procedimiento de integración por partes para la integral del segundo miembro.

103

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

Completar la solución.

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

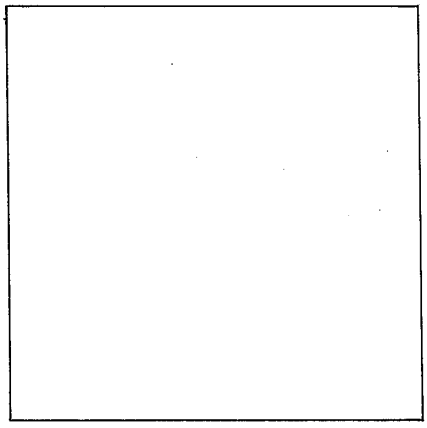
$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

- $x = u$ ← **1**
- $\cos x\,dx = dv$ ← **2**
- $dx = du$ ← **3**
- $\operatorname{sen} x = v$ ← **4**

104

$\int x^2 e^x dx = ?$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{du} = x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

para la integral original

$x^2 = u$ ◄1
$e^x dx = dv$ ◄2
$2xdx = du$ ◄3
$e^x = v$ ◄4

para la segunda integral

$x = u$ ◄ 1
$e^x dx = dv$ ◄2
$dx = du$ ◄3
$e^x = v$ ◄4

105

En otras ocasiones resulta, al aplicar el procedimiento de integración por partes, una integral igual a la integral original, lo cual nos permite obtener el resultado de esta última por transposición de términos.

106

Intentaremos resolver por partes, esta integral, cuya solución habíamos dejado pendiente.

$$\int \sec^3 x\, dx$$

107

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{\sec x}_{u} \cdot \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} = \boxed{}$$

$\sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx$

Hagamos:

$\sec x = u$ ← 1

$\sec^2 x\, dx = dv$ ← 2

$\boxed{} = du$ ← 3

$\boxed{} = v$ ← 4

$\sec x \tan x\, dx$

$\tan x$

108

Hemos obtenido:

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx$$

En la integral del segundo miembro hacemos la sustitución:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

con lo que resulta:

$\int \sec^3 x\,dx =$ [_____]

$\sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\,dx$

o

$\sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

109

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Como: $\int \sec x\,dx =$ [_____]

obtenemos:

$\int \sec^3 x\,dx =$ [_____]

$\ln|\sec x + \tan x|$

$\sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \tan x|$

110

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 dx + \ln|\sec x + \tan x|$$

Resolviendo para $\int \sec^3 x\,dx$, finalmente obtenemos:

[_____]

[_____]

$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

111

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$$

112

Aunque es difícil
dar reglas fijas para
escoger **u** y **dv**
al aplicar la fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

conviene hacer la selección
de manera que:

dv sea fácilmente integrable y

$\int v\,du$ no resulte más complicada

que $\int u\,dv$.

113

$\int x \cdot 5^x\,dx = ?$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{5^x dx}_{dv} = \frac{x \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^x dx = \frac{x \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + C = \frac{x \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{(\ln 5)^2} + C$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5}\left(x - \frac{1}{\ln 5}\right) + C$$

- $x = u$ ← **1**
- $5^x dx = dv$ ← **2**
- $dx = du$ ← **3**
- $\frac{5^x}{\ln 5} = v$ ← **4**

114

$\int x \operatorname{sen}^2 3x\,dx = ?$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

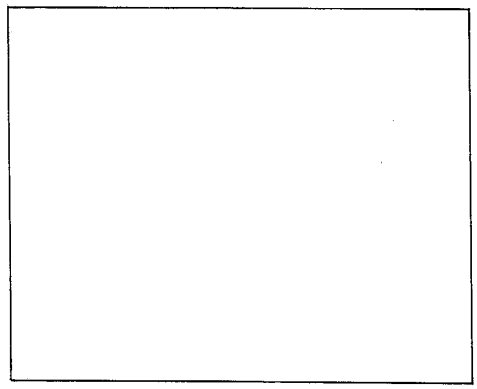
$$\int x \operatorname{sen}^2 3x\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \operatorname{sen} 6x}{12} - \int \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12}}_{\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 6x}{72} + C$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x \operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\cos 6x}{72} + C$$

- $x = u$ ← **1**
- $\operatorname{sen}^2 3x\,dx = dv$ ← **2**
- $dx = du$ ← **3**
- $\underbrace{\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{12}}_{\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx} = v$ ← **4**

115

$\int \text{Arc sen } x\,dx = ?$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{\text{Arc sen } x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\text{Arc sen } x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{du} = x \text{ Arc sen } x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \; *$$

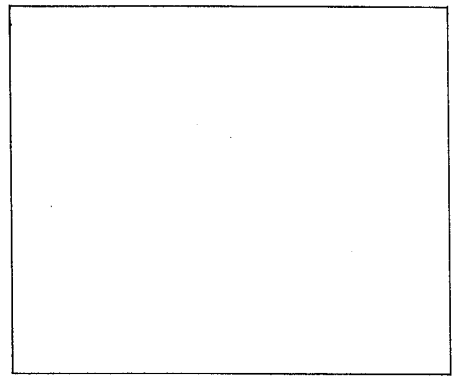
$$= \mathbf{x \text{ Arc sen } x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

- $\text{Arc sen } x = u$ ◀ **1**
- $dx = dv$ ◀ **2**
- $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$ ◀ **3**
- $x = v$ ◀ **4**

* Haciendo el cambio de variable $1 - x^2 = z$

116

$\int x \text{ Arc sen } x^2\,dx = ?$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \underbrace{\text{Arc sen } x^2}_{u}\,\underbrace{du}_{du} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\,\underbrace{\text{Arc sen } x^2}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}}_{du} = \frac{x^2}{2}\text{Arc sen } x^2 - \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}*$$

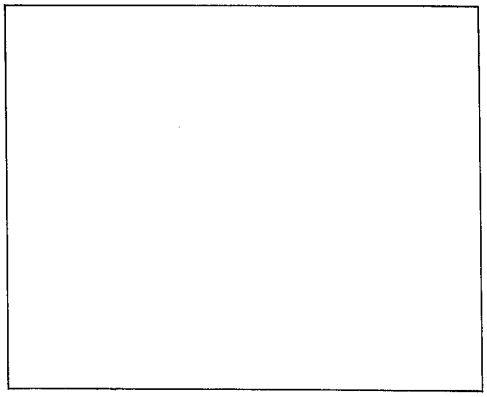
$$= \mathbf{x^2\,Arc\,sen\,x^2 + \frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + C}$$

- $\text{Arc sen } x^2 = u$ ◀ **1**
- $x\,dx = dv$ ◀ **2**
- $\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = du$ ◀ **3**
- $\frac{x^2}{2} = v$ ◀ **4**

* Haciendo el cambio de variable $1 - x^4 = z$

117

$\int e^x \cos x\,dx = ?$



Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = e^x \text{sen } x - \int e^x \text{sen } x\,dx = e^x \text{sen } x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

para la integral original

$e^x = u$ ◀ **1**
$\cos x\,dx = dv$ ◀ **2**
$e^x dx = du$ ◀ **3**
$\text{sen } x = v$ ◀ **4**

$$= 2\int e^x \cos x\,dx = e^x \text{sen } x + e^x \cos x$$

$$= \int \mathbf{e^x \cos x\,dx} = \mathbf{\frac{e^x(\text{sen } x + \cos x)}{2} + C}$$

para la segunda integral

$e^x = u$ ◀ **1**
$\text{sen } x\,dx = dv$ ◀ **2**
$e^x dx = du$ ◀ **3**
$-\cos x = v$ ◀ **4**

8.4.4.1

Práctica adicional de
cálculo de integrales
por el método de
integración por partes,
si se considera necesario.

8.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales por el método de integración por partes.

4.5

Fórmulas de reducción

118

Como nos hemos dado cuenta,
la operación de integración es
más difícil que la de diferenciación.
En muchas ocasiones hay que proceder
por tanteos y no siempre estamos seguros
de que exista una función
cuya derivada conocemos.

119

El trabajo para calcular ciertas
integrales puede ser disminuido
mediante el uso de

fórmulas de reducción

en que el resultado de una
integral está dado en dos partes,
una de las cuales es una nueva
integral menos complicada
que la original.

120

Por ejemplo:

queremos una fórmula de reducción para

$$\int \text{sen}^m x\, dx$$

121

Utilizando el método de integración por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \text{sen}^m x\, dx = \int \underbrace{\text{sen}^{m-1} x}_{u} \cdot \underbrace{\text{sen}\, x\, dx}_{dv}$$

hagamos

- $\text{sen}^{m-1} x = u$ ← 1
- $\text{sen}\, x\, dx = dv$ ← 2
- $\boxed{\quad} = du$ ← 3
- $\boxed{\quad} = v$ ← 4

$(m-1)\,\text{sen}^{m-2} x \cos(m-1)\, x\, dx$

$-\cos x$

122

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int \text{sen}^m x\, dx = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

$\text{sen}^{m-1} x = u$ ← 1

$\text{sen}\, x\, dx = dv$ ← 2

$(m-1)\,\text{sen}^{m-2} x \cos x\, dx = du$ ← 3

$-\cos x = v$ ← 4

$-\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \text{sen}^{m-2} x \cos^2 x\, dx$

123

$$\int \text{sen}^m x\,dx = -\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$= -\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x\,(1 - \text{sen}^2 x)\,dx$$

Completemos la solución:

$$\int \text{sen}^m x\,dx = \boxed{}$$

$$\int \text{sen}^m x\,dx = -\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x\,dx - (m-1)\int \text{sen}^m x\,dx$$

$$\int \text{sen}^m x\,dx + (m-1)\int \text{sen}^m x\,dx = -\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x\,dx$$

$$m\int \text{sen}^m x\,dx = -\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x\,dx$$

$$-\frac{\text{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \text{sen}^{m-2} x\,dx$$

124

$$\int \text{sen}^m x\,dx = -\frac{\text{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \text{sen}^{m-2} x\,dx$$

125

Siguiendo el procedimiento anterior nos es posible deducir un sinnúmero de

fórmulas de reducción

que se encuentran enlistadas en

tablas de integrales.

De estas entresacaremos algunas fórmulas para ilustrar la manera como pueden ser aplicadas.

126

Tabla 5. Algunas fórmulas de reducción

Funciones algebraicas

1. $$\int u^m (a + bu^q)^p du = \frac{u^{m-q+1}(a + bu^q)^{p+1}}{b(pq + m + 1)} - \frac{a(m - q + 1)}{b(pq + m + 1)} \int u^{m-q} (a + bu^q)^p du$$

2. $$\int u^m (a + bu^q)^p du = \frac{u^{m+1}(a + bu^q)^p}{pq + m + 1} + \frac{a\,pq}{pq + m + 1} \int u^m (a + bu^q)^{p-1} du$$

127

Tabla 6. Algunas fórmulas de reducción.

Funciones trigonométricas

1. $$\int \text{sen}^m u\,du = -\frac{\text{sen}^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \text{sen}^{m-2} u\,du$$
2. $$\int \cos^m u\,du = \frac{\cos^{m-1} u \,\text{sen}\, u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} u\,du$$
3. $$\int \tan^m u\,du = \frac{\tan^{m-1} u}{m - 1} - \int \tan^{m-2} u\,du$$
4. $$\int \cot^m u\,du = -\frac{\cot^{m-1} u}{m - 1} - \int \cot^{m-2} u\,du$$
5. $$\int \sec^m u\,du = \frac{\sec^{m-2} u \tan u}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} u\,du$$
6. $$\int \text{cosec}^m u\,du = -\frac{\text{cosec}^{m-2} u \cot u}{m - 1} + \frac{m-2}{m-1} \int \text{cosec}^{m-2} u\,du$$

128

Tabla 7. Algunas fórmulas de reducción

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. $$\int u^m e^{au} du = \frac{u^m e^{au}}{a} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} e^{au} du$$
2. $$\int u^m b^{au} du = \frac{u^m b^{au}}{a \ln b} - \frac{m}{a \ln b} \int u^{m-1} b^{au} du$$
3. $$\int u^m \ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \ln^n u - \frac{n}{m + 1} \int u^m \ln^{n-1} u\,du$$
4. $$\int e^{au} \ln u\,du = \frac{e^{au} \ln u}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{au}}{u} du$$

129

Utilizando la fórmula de reducción apropiada, calculemos:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

Podemos reescribir la integral en la forma:

$$\int x^2 (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

por lo que una fórmula de reducción adecuada podría ser la número [ ]

5.1 o 5.2

130

$$\int x^2 (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Probemos la fórmula 5.1.

$$\int u^m (a+bu^q)^p\,du = \frac{u^{m-q+1}(a+bu^q)^{p+1}}{b(pq+m+1)} - \frac{a(m-q+1)}{b(pq+m+1)} \int u^{m-q}(a+bu^q)^p\,du$$

u = [ ] ←1
m = [ ] ←2
a = [ ] ←3
b = [ ] ←4
q = [ ] ←5
p = [ ] ←6
du = [ ] ←7

- x
- 2
- 2
- $-\frac{1}{2}$
- -4
- 1
- dx

131

Tenemos, por sustitución en la fórmula 5.1.

$$\int x^2 (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,du = [\quad]$$

$$\frac{x(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{2} - 2\int (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

132

Hemos obtenido:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\int \frac{du}{\sqrt{x^2-4}}$$

El resultado de la integral del segundo miembro puede ser dado por la fórmula 3.7, que hemos deducido en el módulo anterior, o calculado por sustitución trigonométrica; por lo tanto:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$$

133

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$$

8.4.5.1

Práctica adicional de aplicación de las fórmulas de reducción de la tabla 5, si se considera necesario.

134

Calcular $\int \tan^5 3x\,dx$

usando la fórmula de reducción adecuada.

135

$\int \tan^5 3x\,dx = ?$

Utilizaremos la fórmula núm. ⌊____⌋

6.3

136

$\int \tan^5 3x\,dx = ?$

Fórmula 6.3 $\int \tan^m u\,du = \frac{\tan^{m-1} u}{m-1} - \int \tan^{m-2} u\,du$

$m =$ ⌊____⌋ ◄1

$u =$ ⌊____⌋ ◄2

⌊⌋ $= dx$ ◄3

5

$3x$

$\frac{du}{3}$

137

$$\int \tan^5 3x\,dx = \boxed{}$$

integral expresada en términos de u y m

$m = 5$ ◄1

$u = 3x$ ◄2

$\frac{du}{3} = dx$ ◄3

$\frac{1}{3}\int \tan^m u\,du$

138

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \tan^m u\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{\tan^{m-1} u}{m-1} - \int \tan^{m-2} u\,du\right]$$

$m = 5$ ◄1

$u = 3x$ ◄2

$\frac{du}{3} = dx$ ◄3

En términos de x: $\boxed{}$

$\frac{1}{3}\left[\frac{\tan^4 3x}{4} - 3\int \tan^3 3x\,dx\right]$

o bien

$\frac{\tan^4 3x}{12} - \int \tan^3 3x\,dx$

139

Hemos obtenido:

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \int \tan^3 3x\,dx$$

Aplicaremos nuevamente la fórmula 6.3 a la integral del segundo miembro:

$m = \square$ ◄1

$u = \square$ ◄2

$\square = dx$ ◄3

3

3x

$\frac{du}{3}$

140

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \int \tan^3 3x\,dx$$

Ahora:

$\int \tan^3 3x\,dx =$ ____ Integral expresada en términos de n y m.

____ Resultado en términos de u y m.

____ Resultado en términos de x.

$\frac{1}{3}\int \tan^m u\,du$

$\frac{1}{3}\left[\frac{\tan^{m-1} u}{m-1} - \int \tan^{m-2} u\,du\right]$

$\frac{1}{3}\left[\frac{\tan^2 3x}{2} - 3\int \tan 3x\,dx\right]$

141

Tenemos:

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \int \tan^3 3x\,dx$$

pero

$$\int \tan^3 3x\,dx = \frac{\tan^2 3x}{6} - \int \tan 3x\,dx$$

por lo que:

$\int \tan^5 3x\,dx =$ ____

$\frac{\tan^4 3x}{12} - \frac{\tan^2 3x}{6} + \int \tan 3x\,dx$

142

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \frac{\tan^2 3x}{6} + \int \tan 3x\,dx$$

Sabemos que:

$\int \tan 3x\,dx =$ ____

por lo que finalmente:

$\int \tan^5 3x dx =$ ____

$\frac{\ln|\sec 3x|}{3}$

$\frac{\tan^4 3x}{12} - \frac{\tan^2 3x}{6} + \frac{\ln|\sec 3x|}{3} + C$

143

$$\int \tan^5 3x\,dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \frac{\tan^2 3x}{6} + \frac{\ln|\sec 3x|}{3} + C$$

8.4.5.2

Práctica adicional de aplicación de las fórmulas de reducción de la tabla 6, si se considera necesario.

144

Se requiere calcular:

$$\int x^2 \ln x\,dx$$

utilizando alguna fórmula de reducción.

145

$$\int x^2 \ln x \, dx = ?$$

Fórmula de reducción aplicable: [ ]

7.3

146

$$\int x^2 \ln x \, dx = ?$$

Fórmula de reducción 7.3:

$$\int u^m \ln^n u \, du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \ln^n u - \frac{n}{m+1} \int u^m \ln^{n-1} u \, du$$

u = [ ] ←1
m = [ ] ←2
n = [ ] ←3

du = [ ] ←4

x
2 dx
1

147

$\int x^2 \ln x \, dx =$ [ ] Integral expresada en términos de u, m y n.

[ ] Solución en términos de u, m y n.

[ ] Solución en términos de x.

$\int u^m \ln u \, du$

$\frac{u^{m+1}}{m+1} \ln^n u - \frac{n}{m+1} \int u^m \ln^{n-1} u \, dn$

$\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$

puesto que $\ln^{n-1} u = \ln^{1-1} u = \ln^0 u = 1$

148

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

Como $\int x^2 \, dx =$ ⌊ ⌋

$\int x^2 \ln x \, dx =$ ⌊ ⌋

- $\frac{x^3}{3}$
- $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$

  o bien

  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

  o bien

  $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$

149

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$$

8.4.5.3

Práctica adicional de aplicación de las fórmulas de reducción de la tabla 7, si se considera necesario.

8.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales mediante la aplicación de fórmulas de reducción.